אינפי למדעים - 2009/10 - תרגיל #9

7 במאי 2010

להגשה עד יום ג', 11.05.2010, בשעה 10:00, בתא המתאים בבנין מתמטיקה.
יש להגיש רק את הסעיפים שמסומנים כ "להגשה".
חובה לצרף בהתחלה את דף השער המופיע באתר! (תרגיל ללא דף שער לא יבדק)

מותר להסתמך על העובדות הידועות הבאות:
פונקצית האקספוננט $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, המוגדרת על ידי $\exp(x) = e^x$, גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומתקיימת $\exp' = \exp$.
הפונקציות $\sin, \cos$ גזירות בכל $\mathbb{R}$, ומתקיים $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. מותר גם להסתמך על תכונות בסיסיות אחרות שלהם: חסומות בין ± 1, באיזה נקודות הפונקציות הטריגונומטריות מתאפסות, באיזה נקודות הן מקבלות את הערכים ± 1, באיזה תחומים הן מונוטוניות עולות\יורדות, וכו.

1. מצאו את כל נקודות המקסימום המקומי והמינימום המקומי של הפונקציות הבאות. הצדיקו את תשובתכם.
א. הפונקציה f, המוגדרת על ידי:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & if \;\; x \neq 0 \\ 1 & if \;\; x = 0 \end{cases}$$

ב. **(להגשה)** הפונקציה g, המוגדרת על ידי:

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & if \;\; x \leq 0 \\ -x+1 & if \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & if \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

ג. **(להגשה)** הפונקציה h המוגדרת על ידי

$$h(x) = \begin{cases} x & if \;\; x \in \mathbb{Q} \\ -x & if \;\; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. **(להגשה)** יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ עם $0 < a < 1$. הראו כי למשוואה $x - a \cdot \sin(x) = b$ יש פתרון יחיד.
הערה: יש להוכיח גם קיום (בעזרת משפט ערך הביניים) וגם יחידות (בעזרת שיקולי נגזרת).

3. הוכיחו את האי־שיוויונים הבאים **מתוך משפט ערך הממוצע** (משפט לגרנז'):
א. **(להגשה)** לכל $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
ב. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ עם $0 \leq \beta < \alpha$,

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha^2} < arctan(\alpha) - arctan(\beta) < \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \leq \alpha - \beta$$

(השתמשו ב־$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$).

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & if \;\; x \neq 0 \\ 0 & if \;\; x = 0 \end{cases}$.
א. הראו כי f גזירה בכל $\mathbb{R}$, וחשבו את נגזרתה בכל נקודה.
ב. הראו כי לכל קטע פתוח I המכיל את 0, קיים $z \in I$, כך ש־$f'(z) < 0$.

ג. **(להגשה)** הסיקו ש־f לא עולה בשום סביבה של 0 (כלומר, הראו שעבור כל קטע פתוח I המכיל את 0, יש $u, v \in I$ המקיימים $u > v$ וגם $f(u) < f(v)$.) שימו לב שזה למרות שמתקיים $f'(0) > 0$.

5. **(להגשה)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה. הראו שאם f מתאפס ב־m נקודות, אז f' מתאפס בלכל הפחות $m-1$ נקודות.

6. **(להגשה)** הראו כי אם $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ רציפות, גזירות ב־(a, b), מתקיים $f(b) \geq g(b)$ ולכל $x \in (a, b)$ מתקיים $f'(x) \leq g'(x)$, אזי לכל $x \in (a, b]$, $f(x) \geq g(x)$.

7. **(רשות)** (דרוש ידע באלגברה ליניארית) נשים לב שמשפט הממוצע של קושי ניתן לכתיבה בעזרת מטריצות: תהי $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפות, וגזירות ב־(a, b). אז קיים $c \in (a, b)$ כך ש:

$$\det \begin{pmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(c) & g'(c) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

כש־$\det$ מסמן דטרמיננטה.
הכלילו את משפט קושי: תהי $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפות, וגזירות ב־(a, b). אז קיים $c \in (a, b)$ כך ש:

$$\det \begin{pmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{pmatrix} = 0$$

(משפט קושי הוא המקרה שמתקבל כאשר $h \equiv 1$.) רמז: התבוננו בפונקציה $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ הנתונה על ידי:

$$\varphi(x) = \det \begin{pmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{pmatrix}$$