פתרון מבחן בחדו"א 1ת' 14.12.05
אמצע סמסטר חורף תשס"ו

שאלה 1 (הוכחת משפט): (25%)

א. נתונה סדרה מתכנסת $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $L \neq 0$. הוכח על פי ההגדרה, כי קיים מספר טבעי N, כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n| > \frac{|L|}{2}$.

ב. הוכח על פי ההגדרה ו/או סעיף א' כי: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ונתון כי $a_n \neq 0, L \neq 0$ לכל n טבעי, אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$.

פתרון:

א. יהי $\varepsilon = \frac{|L|}{2} > 0$. נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ לכן קיים N טבעי כך שלכל $n \geq N$ מתקיים על פי אי שוויון המשולש: $|L| - |a_n| \leq |a_n - L| < \frac{|L|}{2} = \varepsilon$ ולכן לכל $n \geq N$ מתקיים $(1)\ |a_n| > \frac{|L|}{2}$.
מש"ל.

ב. יהי $\varepsilon > 0$. נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ לכן קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $(2)\ |a_n - L| < \varepsilon$.
נסמן $n_0 = \max\{N, n_1\}$ אזי לכל $n \geq n_0$ מתקיים גם (1) מסעיף א' וגם (2). לכן לכל $n \geq n_0$ מתקיים: $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - a_n|}{|a_n||L|} < (2) < \frac{\varepsilon}{|a_n||L|} \leq (1) \leq \frac{2\varepsilon}{L^2}$. ומכאן $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$.
מש"ל.

שאלה 2 (הוכחת משפט): (25%)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ונתון כי $f(a)\cdot f(b) < 0$. הוכח כי קיימת נקודה c בקטע (a,b) שבה $f(c) = 0$.

פתרון:

נסמן $a_1 = a, b_1 = b$. נחצה את הקטע $[a_1, b_1]$ לשני קטעים באורך שווה: $[a_1, h_1], [h_1, b_1]$.
יכולות להתקיים רק שלש האפשרויות הבאות:

1. $f(h_1) = 0$ ואז נקבע $c = h_1 \in (a,b)$ וסיימנו.
2. $f(a_1)\cdot f(h_1) < 0$ ואז נסמן $a_2 = a_1, b_2 = h_1$
3. $f(h_1)\cdot f(b_1) < 0$ ואז נסמן $a_2 = h_1, b_2 = b_1$.

נעשה אותה פעולה על $[a_2, b_2]$ עם נקודת חצייה h_2 וכן הלאה. אם לא נפגוש אף פעם נקודת חצייה שבה הפונקציה מתאפסת, נקבל סדרה אינסופית של קטעים $[a_n, b_n]$ המקיימת:

א. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ לכל n טבעי.

ב. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$

ג. $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$ לכל n טבעי.

מא' ומב' ומהלמה של קנטור, נובע כי קיימת נקודה יחידה c השייכת לכל הקטעים ומתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$. מג' מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) \le 0$.

בשימוש באריתמטיקה של גבולות של סדרות נקבל: $\lim_{n\to\infty}\left(f(a_n)\cdot f(b_n)\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

(מרציפות הפונקציה f נובע שהגבולות קיימים כל אחד לחוד)

f רציפה ולכן $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = f(c)^2 \ge 0$

אבל למעלה קיבלנו כי $f(c)^2 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) \le 0$. מכאן ש- $f(c)=0$.

קיבלנו שקיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש $f(c)=0$ וזה מש"ל.

<u>שאלה 3: (25%)</u>

הוכח כי אם $P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ הוא פולינום מדרגה k כלשהי, כך ש- $P(n) > 0$ לכל n טבעי, אזי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)} = 1$.

<u>פתרון:</u>

נחשב במקום הגבול הנתון את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{P(n)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{P(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_k(n+1)^k + a_{k-1}(n+1)^{k-1} + \cdots + a_1(n+1) + a_0}{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} =$$

נחלק מונה ומכנה ב- n^k ולפי אריתמטיקה של גבולות סופיים נקבל:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_k\left(1+\frac{1}{n}\right)^k + a_{k-1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{k-1}}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^k}a_0}{a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\frac{1}{n^k}} = 1$$

לפי המשפט $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (כאשר $a_n > 0$ והגבול הימני קיים), הגבול הנ"ל שווה לגבול הנתון.

<u>שאלה 4 (שאלה משערי הבית): (25%)</u>

תהי a_n סדרה המקיימת $|a_{n+1} - a_n| \le K|a_n - a_{n-1}|$ לכל $n \ge 2$ כאשר $0 \le K < 1$ הוא מספר קבוע בלתי תלוי ב- n. הוכח כי a_n מתכנסת לגבול סופי.

<u>פתרון:</u>

יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ ולכל p טבעי מתקיים:

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - \cdots + a_{n+1} - a_n| \le \\
&\le |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \le \\
&\le (K^p + K^{p-1} + \cdots + K)|a_n - a_{n-1}| = \\
&= (K^p + K^{p-1} + \cdots + K)K^{n-2}|a_2 - a_1| = \\
&= K^{n-1}\frac{1-K^p}{1-K}|a_2 - a_1| < K^{n-1}\frac{1}{1-K}|a_2 - a_1|
\end{aligned}$$

נחשב סכום של טור הנדסי ואז:

נסמן $C = \frac{|a_2 - a_1|}{1-K}$ קבוע חיובי. ואז $|a_{n+p} - a_n| < CK^{n-1} < \varepsilon$.

נבחר n_0 כך ש- $CK^{n_0-1} = \varepsilon$ $(0 \le K < 1)$ ואז לכל $n \ge n_0$ ולכל p טבעי מתקיים $|a_{n+p} - a_n| < CK^{n-1} < CK^{n_0-1} = \varepsilon$. מכאן, לפי הקריטריון של קושי, הסדרה הנתונה מתכנסת.