

---

**EXAMEN WISKUNDIGE LOGICA EN STRUCTUREN**

NAAM en VOORNAAM .....

EXAMENNUMMER .....

**STUDIERICHTING WISKUNDE of NATUURKUNDE**DATUM: september 2003

---

**Vraag 1.**

- a) Zij  $G$  een groep waarvan de orde gelijk is aan een priemgetal  $p$ . Bewijs dat  $G$  cyclisch is.  
b) Hoe bereken je de invers van een element in de groep  $\mathbf{Z}_n^\times$ ?  
c) Zij  $f$  een surjectief ringhomomorfisme van een ring  $R$  naar een ring  $S$ . Veronderstel dat er voor elk element  $b$  in  $R$  een element  $a$  in  $R$  bestaat met  $b = a^2$ . Bewijs dat er dan voor elk element  $y$  in  $S$  een element  $x$  in  $S$  bestaat met  $y = x^2$ .

**Vraag 2.** Vertaal de volgende uitspraak naar de Tarski-wereld-pred-taal (gebruik de relatiesymbolen LeftOf, BackOf, Large, Cube): "Minstens één kubus heeft iets aan zijn linkerkant staan dat niets groot aan zijn achterkant heeft".

**Vraag 3.** Geef een WB-bewijs van de zin

$$(\exists x)(Q(x) \wedge S(x))$$

uit de verzameling bestaande uit de volgende zinnen:

- (1)  $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \wedge R(x, y))]$   
(2)  $(\exists x)[P(x) \wedge S(x) \wedge (\forall y)(R(x, y) \rightarrow S(y))]$

Je mag alleen maar de regels van WB-bewijzen toepassen, en niets anders. Zeg telkens welke regel je toepast, en op welke zinnen.

**Vraag 4.** Is de zin onder de streep al dan niet een logisch gevolg van de zinnen erboven? Zo ja, bewijs. Zo nee, illustreer dit in een geschikte structuur.

$$\frac{(\exists x)(\forall y)\neg P(y, x) \quad (\forall x)(\exists y)[(P(x, y) \wedge Q(x)) \rightarrow P(y, x)]}{(\exists x)(\exists y)(\neg P(y, x) \wedge \neg Q(y))}$$

**Vraag 5.** Is de volgende zin al dan niet logisch waar?

$$((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \longrightarrow (\exists x)((P(x) \wedge R(x)) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$$

**Vraag 6.**

1. Zij  $n \in \mathbb{N}$ . Bewijs dat  $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ .  
2. Zij  $G, *$  een eindige groep van orde  $n$ . Voor  $a \in G$  noteren we met  $L_a$  de linkse translatie

$$L_a : G \rightarrow G : x \mapsto a * x.$$

Zij  $L$  de verzameling van linkse translaties, dus

$$L = \{L_a \mid a \in G\}.$$

- (a) Bewijs dat  $L$  een deelverzameling is van de groep  $\mathcal{S}_n, \circ$  van permutaties van de verzameling  $G$ .  
(b) Bewijs dat  $L$  een deelgroep is van  $\mathcal{S}_n, \circ$ .  
(c) Bewijs dat de groepen  $G, *$  en  $L, \circ$  isomorf zijn.

Geef telkens aan welk axioma uit de definitie van een groep je gebruikt.

**Opmerkingen.** Alleen het net afgeven, met vooraan de vragenlijst met daarop uw naam en examen-nummer ingevuld. Oplossingen van de vragen in volgorde. 1 blad per vraag. Indien blanco voor sommige vragen, dan moet je dat aanduiden op een apart blad achteraan!!!!!!!!!!!!

GEEN jassen en tassen/ GEEN eigen papier/ GEEN pennenzak/ Zakrekenmachine (niet programmeerbaar, met beperkt geheugen), en eten en drinken zijn toegelaten.